

Title	混合型待ち行列網の計算法とその応用(待ち行列理論とその応用)
Author(s)	紀, 一誠
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 490: 195-209
Issue Date	1983-05
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/103513">http://hdl.handle.net/2433/103513</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 混合型待ち行列網の計算法とその応用

日本電気 C&C システム研究所

紀 一 誠  
(Issei Kino)

### 1. はじめに

閉鎖型の Jackson 網 である Gordon-Newell 型待ち行列網  
を利用したセントラルサーバモデルをはじめとし、積形式解を持つ待  
ち行列網は計算機システムや通信網等の情報処理システムの性能  
評価のためのモデルとして広く研究され応用されてきている。

とりわけ、1975年 Basnett et al.<sup>1)</sup>により積形式解を持つ待  
ち行列網の範囲が大きく拡大されて以来、情報処理システム  
のモデルとしての応用範囲も大きく広がり、この BCMP 型待ち  
行列網に基礎を置く性能評価用のソフトウェア・パッケージの開発  
も、QNET<sup>4)</sup>, BEST/1<sup>3)</sup>, PNET<sup>4)</sup>, QSEC<sup>5)</sup>, QM-X<sup>6)</sup> 等多数知ら  
れている。

積形式を持つ待ち行列網を実際問題に適用する場合には数  
値計算に頼らざるを得ない。この計算は、部分連鎖の数、  
網内容数、ロード数等が増加するに従って計算量が飛躍的に増

加してしまうので、応用に際しては効率的な計算法の研究が欠かせない。

本稿は、閉鎖型および開放型部分連鎖が混在する混合型の BCMP 待ち行列網の正規化定数の計算法について示し、さらにこれを応用して作成された情報処理システムの性能評価用ソフトウェアパッケージの M-X 利用の一端を紹介する事により待ち行列網モデルの現実問題への一つの応用例を示す。

混合型網の計算法は、Reiser and Kobayashi<sup>7)</sup>による partial fraction 法, Chandy and Sauer<sup>8)</sup>の LBANC 法, Zaharjan<sup>9)</sup>の MVA<sup>10)</sup> (Mean Value Analysis) の拡張, 等が知られてゐるが、いずれも許されるノードのタイプや部分連鎖の数に制限がある。

本稿の方法は、従来の閉鎖型待ち行列網に関するたたみこみ法<sup>1)</sup>に基礎を置き、開放型部分連鎖が加わる事によりノードの状態空間が有界でなくなる問題点を閉鎖型網に関する客数ベクトルのみを状態とする marginal 確率を導く事により解決してゐる。

## 2. モデル

本稿で扱う混合型待ち行列網モデルを示す。

$N$  個のノードから成る網で、 $S$  種類の客のサービスクラスのある網を考える。サービスクラスは文献 8) に従い、本稿では局所クラス (local class) の意味で用ゐる。

$R$  : 待ち行列網中のサービスクラス集合.

$R_i$  : ノード  $i$  に属するサービスクラスの集合. 但し,  $R = \bigcup_{i=1}^N R_i$ ,

$R_i \cap R_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ , とする.

$p_{ij}$  : サービスクラス  $i$  の客がサービス終了後クラス  $j$  に移る確率.

$P = \{p_{ij}\}$ ,  $i, j = 1 \sim s$  : 客の網内推移確率行列.

本稿では,  $P \in M$  個のエルゴード的な部分連鎖に分解可能であるとし,  $1 \sim L$  までの部分連鎖を閉鎖型,  $L+1 \sim M$  の部分連鎖を開放型とする.

閉鎖型部分連鎖  $l$  に従って網内を移動する客数を  $K_l$ , 客数ベクトル  $K = (K_1, K_2, \dots, K_L)$  とする.

開放型部分連鎖に従う客の網外からの到着はパラメータ  $\lambda_l$  (速度) のポアソン到着とし, 到着客は確率  $g_r$  でクラス  $r$  の客になるものとする.

$C_l$  は部分連鎖  $l$  に従う客が訪内するクラスの集合とする. 但し,  $R = \bigcup_{l=1}^M C_l$ ,

$C_l \cap C_m = \emptyset \quad \forall l \neq m$ .

$N$  個のノードは (表 1) に示す 4 種類のいずれかであるとする. ノード  $i$  のサービス能力は, そのノードに存在す

表 1 ノードのタイプ

タイプ	サービス 規律	サービス要求 時間分布
1	先着順 (FCFS)	指数分布
2	ジョブサイズアソシ (PS)	Coxian
3	無限サーバ (IS)	同上
4	後着順割込優先 中断点再開 (LCFS-PR)	同上

る客数  $j$  の関数とし,  $\hat{\mu}_i(j)$  (人/時間) とし,  $\hat{\mu}_i(1)$  を正規化したサービス能力を  $\mu_i(j) = \hat{\mu}_i(j) / \hat{\mu}_i(1)$  としておく. また, クラス  $r$  の客の平均サービス要求時間を  $1/\hat{\mu}_r$  とし,  $\mu_r = \hat{\mu}_r \hat{\mu}_i(1)$ ,  $r \in R_i$  とする. 但し, ノードのタイプが 1 である場合には, 客はそのサービスクラスに無関係にパラメータ  $\hat{\mu}_i(1)$  を持つ指数分布に従うサービス時間を要求するものとする.

ノードタイプ別のサービス能力を(表2)に示す.

また, 次のサービスクラスの集合を定義しておく.

$$S_{il} = R_i \cap C_l. \quad S_{i0} = \bigcup_{l=1}^M S_{il}.$$

本モデルの平衡状態におけるクラス  $r$  への客の平均訪問回数  $\theta_r$  は次の連立方程式の解として定まる.

$$\theta_r = \xi_r + \sum_{j=1}^s p_{jr} \theta_j, \quad r=1, 2, \dots, S. \quad \dots (1)$$

上式は部分連鎖に対応する  $M$  組の連立方程式に分解される. この内, 閉鎖型部分連鎖に属するものは同次方程式となり, その解は  $\{\theta_r\}$  定数倍を除いて一意に定まる. 開放型の場合には解の存在を仮定する.

クラス  $r$  への負荷量  $\rho_r$

表2. ノード・タイプ別サービス能力

ノード・タイプ		$\mu_i(j)$
1	固定サービス率	$\mu_i(j) = 1, 1 \leq j$
	半可変サービス率	$\mu_i(j) = \begin{cases} j, & 1 \leq j \leq m_i \\ m_i, & m_i \leq j \end{cases}$
	可変サービス率	$\mu_i(j) = \text{任意}$
2, 4		$\mu_i(j) = 1, 1 \leq j$
3		$\mu_i(j) = j, 1 \leq j$

を次のように定義する。

$$e_r = \begin{cases} \theta_r / \mu_r, & r \in C_\ell, \ell = 1 \sim L, \\ \lambda_\ell \theta_r / \mu_r, & r \in C_\ell, \ell = L+1 \sim M. \end{cases} \quad \text{--- (2)}$$

さらに負荷ベクトルを  $e_i = (e_r), r \in R_i$  とする。

$M=3, L=2, S=9, K=(3, 5)$  の場合の混合型待ち行列網の

例を(図1)に示す。

平衡状態におけるクラス  $r$  の客数を  $k_r$ , ノード  $i$  の状態ベクトルを  $k_i = (k_r), r \in R_i$  とし, 待ち行列網全体の状態ベクトル  $k = (k_1, k_2, \dots, k_N)$  で表わすものとする。

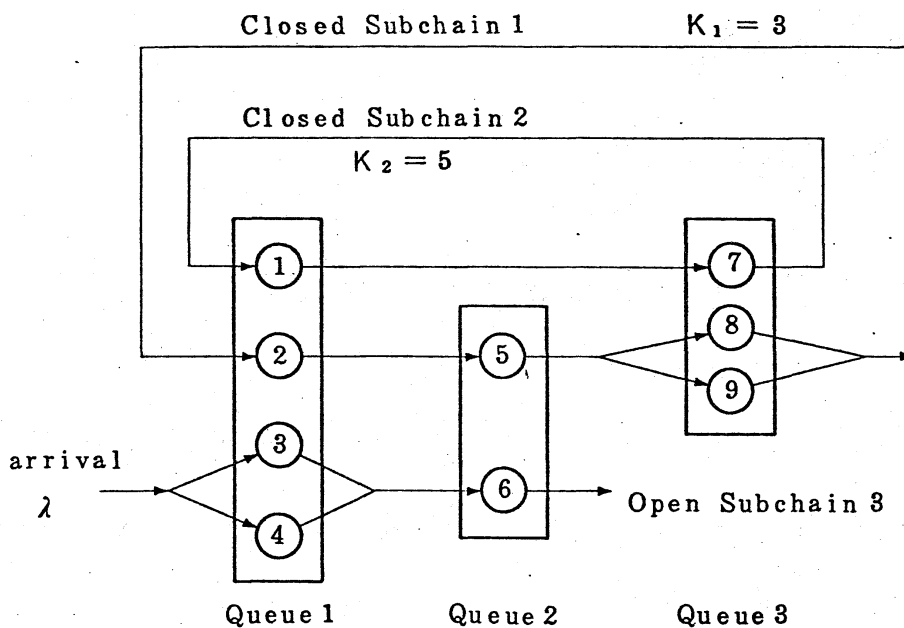


図 1 An example of mixed network with

$N=3, S=9, L=2, M=3, K=(3, 5)$ .

### 3. 積形式解と正規化定数

以下を通じ，積形式表現の簡略化のため次の記法を準備する。  
 $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in L$  次元ベクトルとする。

$$|\mathbf{a}| = a_1 + a_2 + \dots + a_L, \quad \mathbf{x}! = x_1! x_2! \dots x_L!, \\ a^{\mathbf{x}} = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_L^{x_L}.$$

前節で定義した待ち行列網の定常状態確率は次のような積形式に与えられる事が知られている<sup>1)</sup>。

$$P(\mathbf{k}) = \prod_{i=1}^N f_i(\mathbf{k}_i) / g(\mathbf{k}). \quad \dots (3)$$

ここに， $f_i(\mathbf{k}_i)$  はノード  $i$  が状態  $\mathbf{k}_i$  である正規化されない (improper) 状態確率であり，次に与えられる。

$$f_i(\mathbf{k}_i) = a_i(|\mathbf{k}_i|) \frac{|\mathbf{k}_i|!}{\mathbf{k}_i!} \mathbf{c}_i^{\mathbf{k}_i}. \quad \dots (4)$$

$a_i(\mathbf{k})$  はノード  $i$  の容量係数で次式に定義される。

$$a_i(\mathbf{k}) = \left\{ \prod_{j=1}^{\mathbf{k}} \mu_i(j) \right\}^{-1}, \quad a_i(0) = 1. \quad \dots (5)$$

さらに，(3)式中の  $g(\mathbf{k})$  は，状態ベクトル  $\mathbf{k}$  のとり得る可能な総ての状態集合  $F$  にわたる状態確率の和が1なる条件から定まる正規化定数で，次の如くに表現される。

$$g(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k} \in F} \prod_{i=1}^N f_i(\mathbf{k}_i). \quad \dots (6)$$

待ち行列網の応用に際してはこの(6)式に示される正規化定数をいかに効率的に計算するか大きな問題となる。

総ての部分連鎖が串鎖型の場合，即ち  $L=M$  の場合には，

付録 1. に示すたたみこみ演算を用いて (6) 式の計算が実行できる事が知られている<sup>7), 11)</sup>. この方法を混合型の網に拡張する場合の問題点は, 開放型部分連鎖が加わるため, ノードの状態を表現するベクトル  $\mathbf{R}_i$  の定義域が有界でなくなってしまう点である. 先のたたみこみ演算の定義を少々拡張すれば, 形式的には計算する事ができるが, 演算は有限回で終了しない.

#### 4. 周辺確率

前節で示した問題点を解決するために, 有界な定義域を持つ状態に関する (4) 式の周辺確率を導く. 状態ベクトルには, ノード  $i$  に存在する各閉鎖型部分連鎖に従う客数からなるベクトルをとる. 次の記号を定義しておく.

$$[\mathbf{R}]_m = \mathbf{R}(\mathbf{R}+1) \cdots (\mathbf{R}+m-1), [\mathbf{R}]_0 = 1. \quad \mathbf{R}, m \text{ は非負整数.}$$

$$n_{il} = |\mathbf{R}_{il}|, \quad \rho_{il} = |\mathbf{e}_{il}|, \quad l = 1 \sim L.$$

$$\mathbf{R}_{i0} = (\mathbf{R}_r), \quad \mathbf{e}_{i0} = (\mathbf{e}_r), \quad r \in S_{i0}.$$

$$n_{i0} = |\mathbf{R}_{i0}|, \quad \rho_{i0} = |\mathbf{e}_{i0}|, \quad \mathbf{R}_{il} = (\mathbf{R}_r), \quad r \in S_{il}.$$

$$\mathbf{n}_i = (n_{i0}, n_{i1}, \dots, n_{iL}), \quad \mathbf{r}_i = (\rho_{i0}, \rho_{i1}, \dots, \rho_{iL}),$$

$$\mathbf{x}_i = (n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iL}), \quad \mathbf{p}_i = (\rho_{i1}, \rho_{i2}, \dots, \rho_{iL}).$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \dots + \mathbf{n}_N.$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_N \text{ に注意.}$$

ノード  $i$  が状態  $\mathbf{x}_i$  である improper な周辺確率を  $g_i(\mathbf{x}_i)$  とすると次が成り立つ.



Lemma 1.  $0 \leq x_i \leq k$  条件が成立.

$$g_i(x_i) = v_i(|x_i|, \rho_{i0}) \frac{|x_i|!}{x_i!} \rho_i^{x_i}, \quad \dots (7)$$

こゝに,

$$v_i(k, \rho_{i0}) = \sum_{l=0}^{\infty} a_i(k+l) [k+1]_l \rho_{i0}^l / l! . \quad \dots (8)$$

証明)

ノード  $i$  が状態  $n_i$  である improper な周辺確率  $\pi_i(n_i)$  とする  
と定義より次である.

$$\pi_i(n_i) = \sum_{|k_{i0}|=n_{i0}} \sum_{|k_{i1}|=n_{i1}} \dots \sum_{|k_{iL}|=n_{iL}} f_i(k_{i0}, k_{i1}, \dots, k_{iL})$$

(4)式および, 各項係数に関する次の関係を用いて整理.

$$|e_{i\ell}|^{n_{i\ell}} = \sum_{|k_{i\ell}|=n_{i\ell}} |k_{i\ell}|! e_{i\ell}^{k_{i\ell}} / k_{i\ell}! .$$

但し,  $\sum_{|k|=m}$  は, 条件  $|k|=m$  を満たす可能なベクトル  $k$  の総和についての和をとる事を意味するものとする.

$$\pi_i(n_i) = a_i(|n_i|) |n_i|! r_i^{n_i} / n_i! .$$

さらに,  $g_i(x_i) = \sum_{n_{i0}=0}^{\infty} \pi_i(n_i)$  を計算し手式を得る.(以上)

ノードタイプごとの  $v_i(k, \rho_{i0})$  はそれぞれ(表3)に示す如くなる. また, Lemma 1. および (6) 式より, 正規化定数は,

$$g(k) = \sum_{k=x_1+x_2+\dots+x_N} \prod_{i=1}^N g_i(x_i)$$

と表現される. 従って,  $g(k)$  は  $g_i(x_i)$  を用いて次式の如くにたたみこみ演算により計算することができ.

$$g(k) = (g_1 * g_2 * \dots * g_N)(k) . \quad \dots (9)$$

表3 ノードタイプ別の  $v_i(R, \rho_{i0})$ 

ノードタイプ			$v_i(R, \rho_{i0})$
1	固定サービス率		$1 / (1 - \rho_{i0})^{R+1}$
	半可変サービス率	$R \leq m_i - 1$	$\frac{m_i^{m_i}}{(m_i - 1)! (m_i - \rho_{i0})^{R+1}} + \sum_{l=0}^{m_i - R - 1} \left\{ \frac{1}{R!} - \frac{[R+1]_l}{m_i!} \left( \frac{1}{m_i} \right)^{l+R-m_i} \right\} \frac{\rho_{i0}^l}{l!}$
		$m_i \leq R$	$\frac{m_i^{m_i}}{(m_i - 1)! (m_i - \rho_{i0})^{R+1}}$
	2, 4		$1 / (1 - \rho_{i0})^{R+1}$
3		$\exp(\rho_{i0}) / R!$	

また,  $v_i(R, \rho_{i0})$  の収束条件を調べる事により, 混合型の網が定常解を持つ条件は,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_i(j) > \rho_{i0}, \quad \forall i, \quad \dots (10)$$

である事が導かれる。

## 5. 計算アルゴリズム

(9)式は正規化定数が次の2つの手順を  $i=1$  から  $N$  まで繰り返す事により得られる事を意味している。

- ① 記憶領域  $Q$  上に状態確率  $\pi_i(x_i)$  を実現する。
- ②  $i-1$  番目までのノードに関するたたみこみ結果が格納されている記憶領域  $G$  と  $Q$  をたたみこみ, その結果を  $G$  に格納する。

このうち, 手順①を効率的に実行するため次を準備する。

Lemma 2.  $0 \leq x_i \leq K$  まで成り立つ.

$$f_i(x_i) = m_i(|x_i|, \rho_{i0}) \sum_{l=1}^L \rho_{il} f_i(x_i - e_l) \quad \dots (11)$$

証明略. 但し,  $e_l$  は  $l$  方向の単位ベクトル,  $m_i(K, \rho_{i0}) = v_i(K, \rho_{i0}) / v_i(K-1, \rho_{i0})$  とする.

以上の準備のもとに, (9) 式の計算アルゴリズムをプログラム風に表現すると次の如くなる.

[アルゴリズム C]

Dimension  $Q(K_1, K_2, \dots, K_L)$ ,  $G(K_1, K_2, \dots, K_L)$

$$G(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ 0 & , x \neq 0 \end{cases}$$

```

For i = 1 to N
  Q(0) ← { exp(ρi0) , タイプ3のノード
           1 , 上記以外のノード
  For R = 0 to |K|
    For x : |x| = R
      Q(x) ← mi(R, ρi0) ∑l=1L ρil Q(x - el)
    Next x
  Next R
  For R = |K| to 0
    For x : |x| = R
      G(x) ← ∑0 ≤ y ≤ x G(y) · Q(x - y)
    Next x
  Next R
Next i

```

但し, For  $x: |x|=k$ , は条件  $|x|=k$  を満足する可能な  $x$  の組み合わせの総てに関する実行を指示するものとし, 記憶領域の未定義部分にはすべて 0 が格納されているものとする.

17ルゴリズム C] の完了時点で, 記憶領域  $G$  のユーザ  $G(k)$  に正規化定数  $g(k)$  が得られている. 即ち,  $g(k) = G(k)$ .

## 6. 応用

前節までに示した, 混合型BCMP網に関する計算アルゴリズムは, 当社で開発された情報処理システムの性能評価用ソフトウェア・パッケージ QM-X の数値計算用エンジンとしてインプリメントされている. QM-X は FORTRAN でコーディングされた約 13K ステップのプログラムで, 待ち行列網理論と現実問題になじませるための工夫が盛り込まれており, 容易にモデル化が行えるようになっている. 1981 年 10 月に第 1 バージョンが社内リリースされ, 現在は社内約 60 部内のユーザにより使用されており, QM-X に基づく性能評価法についての教育部の教育コースも定期的に用いられている.

この QM-X のリリース後約 10 ヶ月経過した時点で, 利用状況に関するアンケート調査を行なった. この時点でのユーザは約 30, 回答のあったのは 20 ユーザ (25 システム) であった. サンプル数が少りので一般論は展開し難いが, この時の調査結果の一部を以下に紹介し, 待ち行列網モデルの応用について考える

際の一助としたい。

- 1) 1つのモデルに使用されるノード数は、平均15ノード、最大68ノードであった。
- 2) 1つのモデルに使用される部分連鎖の数(サブシステムの数)は、平均3~4、最大7個であった。
- 3) 1つの閉鎖型部分連鎖当りの網内容数は、平均6人、最大40人であった。
- 4) 1回の性能評価作業当たりでは、平均16ケース、最大120ケースの予測を行なっている。
- 5) 1回の性能評価作業に要する工数は、平均12人日、最大60人日であった。
- 6) ツールとしてのQM-Xの評価はおおむね好評ではあったが、不十分な機能に関する指摘や要望事項も数多く寄せられていた。

## 7. まとめ

混合型 BCMP 待ち行列網の計算法について示し、これを応用した性能評価用ソフトウェア・パッケージ QM-X の利用状況の一端を紹介した。

QM-X は全体としてはまだ未熟なツールであり、今後改良を重ねていかなければならない点が多々ある。利用者から寄せられる意見や要望事項のうち、待ち行列網モデルに直接に

関係すると思われる問題点のいくつかを以下に示してまとめ  
 したい。

- ・効果的なスケリング法の開発 (Lamのダイナミック・スケリングの実用化)。
- ・計算の高速化 (モデルの個性を利用した高速演算スキームの開発)。
- ・優先権付待ち行列網の解法 (積形式解を持たない網の近似解法)。
- ・領域問題 (メモリ領域のモデル化) を含んだ待ち行列網の解析。
- ・パッシングサーバを有する網の解析 (網外の待ち時間の評価, デバイス制御装置のモデル化)。
- ・大規模な網の(近似)解法。

# Appendix 1. たたみこみ演算

$K$  および  $x$  を要素が非負整数値  $\geq 0$  とする  $L$  次元ベクトルと  
 $0 \leq x \leq K$  とする.  $a_1(x), a_2(x)$  は  $x$  を変数とする実数  
 値関数とする.  $a(x) = (a_1 * a_2)(x)$  は,  $a_1$  と  $a_2$  をたた  
 みこんで得られる関数といい,  $y$  をインテックス・ベクトルとす  
 る次の演算により定義される.

$$a(x) = \sum_{0 \leq y \leq x} a_1(y) a_2(x-y), \quad 0 \leq x \leq K.$$

$a(x)$  も,  $0 \leq x \leq K$  で定義される実数値  $\geq 0$  とする関数であ  
 り,  $(a_1 * a_2) = (a_2 * a_1)$  は定義より明らか. また, 羽重の  
 たたみこみは, たたみこみの繰り返しとして定義される.

## 【参考文献】

- 1) BasBett, F. et al. : Open, closed, and mixed networks  
 with different classes of customers, J.ACM, vol. 22, no. 2, pp.  
 248 (1975).
- 2) Reiser, M. : Modeling of computer system with QNET4,  
 IBM Syst. J., vol. 15, no. 4, pp. 283 (1976).
- 3) Buzen, J. P. et al. : BEST/1 - Design of a tool for  
 computer system capacity planning, Proc. AFIPS NCC,  
 pp. 447 (1978).

- 4) Bruell, S. C. and Balbo, G. : Computational algorithms for closed queueing networks, North-Holland 1980.
- 5) 池原, 山田 : 汎用ネットワーク形待ち行列解析プログラム QSEC に ついて, 信学会通信部内全国大会, pp.161 (1978).
- 6) 納富, 北浦 : 性能予測ツール QM-X とその応用, 情報処理学会, 計算機システムの制御と評価研究会, 17-8 (1982).
- 7) Reiser, M. and Kobagashi, H. : Queueing networks with multiple closed chains : theory and computational algorithms, IBM J. Res. Dev., vol. 19, pp. 283 (1975).
- 8) Chandy, K. and Sauer, C.H. : Computational algorithms for product form queueing networks, Comm. ACM, vol. 23, no. 10, pp. 573 (1980).
- 9) Zahorjan, J. : The solution of separable queueing networks models using mean value analysis, Proc. ACM-SIGMETRICS, vol. 10, no. 3, pp. 85 (1981).
- 10) Reiser, M. and Lavenberg, S.S. : Mean value analysis of closed multichain queueing networks, J. ACM, vol. 22, no. 2, pp. 313 (1980).
- 11) Reiser, M. : Numerical methods in separable queueing networks, TIMS Studies in Manage. Sci., vol. 7, pp. 113 (1977).